ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.
VII. KÖTET. XXV. SZÁM. 1880.

A PONTOKBÓL, VAGY ÉRINTŐKBŐL ÉS A CONJUGÁLT HÁROMSZÖGBŐL MEGHATÁROZOTT KÚPSZELET NEMÉNEK ELDÖNTÉSÉRE SZOLGÁLÓ KRITÉRIUMOK.

HUNYADY JENŐ
LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. október 18-án.)

Ára 10 kr.

BUDAPEST, 1881.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

A PONTOKBÓL, VAGY ÉRINTŐKBŐL

ÉS A CONJUGÁLT

HÁROMSZÖGBŐL MEGHATÁROZOTT KÚPSZELET

NEMÉNEK ELDÖNTÉSÉRE SZOLGÁLÓ

KRITÉRIUMOK.

HUNYADY JENŐ

LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. október 18-án.)

BUDAPEST, 1881.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.

A pontokból, vagy érintőkből és a conjugált háromszögből meghatározott kúpszelet nemének eldöntésére szolgáló kritériumok.

A szerző következő czimű értekezésében »A másodfokú görbék és felületek meghatározásáról« ki lett mutatva, hogy a kúpszelet egyféleképen van meghatározva egy conjugált háromszögből és két pontból, valamint szintén egy conjugált háromszögből és egy adott érintőből.

Ha a kúpszelet parabola, akkor, miután a parabola négy feltételből van meghatározva, a parabola meghatározására szükséges és elégséges adatok a következők lesznek:

a) A conjugált háromszög és egy pont.

b) A conjugált háromszög és egy érintő.

Az *a*) alatti esetben vagy két parabolát nyerünk, vagy egyet sem, a *b*) alatti esetben pedig a feladat követelményeinek mindenkor egy parabola felel meg.

A következő sorok czélja első sorban azon kritériumok felkeresésében áll, hogy az *a* alatti adatokból mikor van két parabola meghatározva és mikor egy sem. További czélja pedig e soroknak annak eldöntése:

1. Mikor lesz az egy conjugált háromszögből és két adott pontból meghatározott kúpszelet ellipsis és mikor hyperbola?

2. Mikor lesz az egy conjugált háromszögből és két adott érintőből meghatározott kúpszelet és mikor hyperbola.

BEVEZETÉS.

1. Legyenek x, y és u, v a currens orthogonál pont- és vonalcoordináták, továbbá x_i, y_i az i pont coordinátái, u_k, v_k pedig a k egyenes vonalcoordinátái. Végre még a következő elöléseket használjuk:

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = (ik0) \\
\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix} = (ikl) \\
\begin{vmatrix} y_i & 1 \\ y_k & 1 \end{vmatrix} = \xi_{ik}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_k \end{vmatrix} = \eta_{ik}, \quad \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}
\end{array}\right\} \ldots\ldots (a)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{vmatrix} u_i & v_i & 1 \\ u_k & v_k & 1 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = [ik0] \\
\begin{vmatrix} u_i & v_i & 1 \\ u_k & v_k & 1 \\ u_l & v_l & 1 \end{vmatrix} = [ikl] \\
\begin{vmatrix} v_i & 1 \\ u_k & 1 \end{vmatrix} = q_{ik} \quad \begin{vmatrix} 1 & u_i \\ 1 & u_k \end{vmatrix} = r_{ik}, \quad \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_k & v_k \end{vmatrix} = s_{ik}
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (b)$$

2. A jövőben bizonyos azonos egyenletekre lévén szükségünk, azokat most fejtjük ki.

Ha ugyanis a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} \xi_{43} & \eta_{43} & \zeta_{43} \\ \xi_{01} & \eta_{01} & \zeta_{01} \\ \xi_{21} & \eta_{21} & \zeta_{21} \end{vmatrix} \ldots\ldots (c)$$

a következővel sokszorozzuk:

$$\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$$

akkor az egyenlő tényezők elhagyása után találjuk, hogy:

$$\begin{vmatrix} \xi_{43} & \eta_{43} & \zeta_{43} \\ \xi_{01} & \eta_{01} & \zeta_{01} \\ \xi_{21} & \eta_{21} & \zeta_{21} \end{vmatrix} = -(123)(140)+(124)(130) \ldots . (d)$$

ha pedig a (c) alatti determinánst a következővel sokszorozzuk, akkor találjuk, hogy:

$$\begin{vmatrix} \xi_{43} & \eta_{43} & \zeta_{43} \\ \xi_{01} & \eta_{01} & \zeta_{01} \\ \xi_{21} & \eta_{21} & \zeta_{21} \end{vmatrix} = (120)(134) \ldots . (e)$$

és így a (d) és (e) alatti egyenletek összehasonlításából a következő nevezetes egyenletet nyerjük:

$$(124)(130)-(134)(120) = (123)(140) \ldots . (f)$$

és ehhez hasonlóan a következő egyenleteket:

$$\left.\begin{array}{l} (124)(230)-(234)(120) = (123)(240) \\ (134)(230)-(234)(130) = (123)(340) \end{array}\right\} \ldots . (g)$$

1. §. Az 123 háromszögnek conjugált és a 4 ponton átmenő kúpszeletsereg egyenletének meghatározása.

3. Az előrebocsátott jelölések mellett az 123 háromszögnek conjugált kúpszelet egyenletét a következőképen írhatjuk:

$$\lambda_1(023)^2+\lambda_2(013)^2+\lambda_3(012)^2 = 0, \ldots . (1)$$

mely egyenletben λ_1, λ_2, λ_3 határozatlan paramétereket jelentenek. Annak feltétele pedig, hogy az (1) alatti kúpszelet a 4 ponton is átmegy, a következő:

$$\lambda_1(234)^3+\lambda_2(134)^2+\lambda_3(124)^2 = 0. \ldots . (2)$$

Az (1) és (2) alatti egyenletekből λ_1-et kiküszöbölve és $\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = -\lambda$-val téve, a következő egyenletet nyerjük:

$$\begin{vmatrix} (023)^2 & (013)^2 \\ (234)^2 & (134)^2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} (023)^2 & (012)^2 \\ (234)^2 & (124)^2 \end{vmatrix} = 0, \ldots (3)$$

mely a 4 ponton átmenő és az 123 háromszögnek conjugált kúpszeletsereg egyenletét fejezi ki.

A (3) alatti egyenletet még redukálhatjuk, ha azt a következő alakban írjuk:

$$\{(134)(230)+(234)(130)\}\{(134)(230)-(234)(130)\}-$$
$$-\lambda\{(124)(230)+(234)(120)\}\{(124)(230)-(234)(120)\}=0.$$

vagy ha itt még a (2) alatti egyenletekre vagyunk tekintettel, akkor a kérdéses kúpszeletsereg egyenletének a következő alakot adhatjuk:

$$\{(134)(230)+(234)(130)\}(340)-$$
$$-\lambda\{(124)(230)+(234)(120)\}(240)=0 \ldots (4)$$

4. A következő egyenletek:

$$\left.\begin{array}{l}(124)(130)-(134)(120)=0\\(124)(230)-(234)(120)=0\\(134)(230)-(234)(130)=0\end{array}\right\}\ldots (5)$$

az (f) és (g) alatti egyenleteknél fogva így írhatók:

$$\left.\begin{array}{l}(140)=0\\(220)=0\\(340)=0\end{array}\right\}\ldots (6)$$

mely egyenletekben az 14, 24 és 34 egyeneseknek az egyenleteit ismerjük fel.

A következő egyenletek által kifejezett egyenesek pedig -

$$\left.\begin{array}{l}(124)(130)+(134)(120)=0\\(124)(230)+(234)(120)=0\\(134)(230)+(234)(134)=0\end{array}\right\}\ldots (7)$$

Az 123 háromszög csúcsaiban találkozó oldalpárhoz a (6) alatti egyenesekkel harmonikusan conjugált egyenes párakat fejezik ki, mit könnyen belátunk, ha a (7) alatti egyenleteket az (5) alattiakkal összehasonlítjuk.

Ha tehát az 123 háromszögben az 12 és 13 oldalakhoz: és az 14 egyenesnek conjugált negyedik harmonikust megszerkesztjük, melyet a-val jelölünk és épen így a 23, 21 oldalpárnak és a 24-nek conjugált negyedik harmonikust b-vel, valamint a 31 és 32 oldalpárnak és a 34-nek conjugált negyedik harmonikust c-vel jelölve, az a, b és c egyenesek egyenletei a (7) alatti egyenletek.

5. A (4) alatti kúpszeletsereg a következő pontokon megy át:

$$\left.\begin{array}{ll} [4] \ldots. & (240)=0,\ (340)=0 \\ [24,c] \ldots. & (240)=0,\ (134)(230)+(234)(130)=0. \\ [34,b] \ldots. & (340)=0,\ (124)(230)+(234)(120)=0 \\ [b,c] \ldots & (124)(230)+(234)(120)=0,\ (134)(230)+ \\ & \qquad +(234)(130) \end{array}\right\}$$

A (4) alatti egyenlet mutatja továbbá, hogy a kérdéses kúpszeletsereget épen úgy határozzák meg a 4, [24, c], [34, b] és [b, c] pontok, valamint azt a 4 pont és az 123 conjugált háromszög meghatározzák.

Ezek által egyelőre a következő tételt nyertük:

»*Ha az 123 háromszög 2 és 3 csúcsában az azokban találkozó oldalpárhoz és az illető csúcsokat a 4 ponttal összekötő egyenesnek conjugált b és c harmonikus vonalakat szerkesztjük, akkor a 4 ponton átmenő és az 123 háromszögnek conjugált kúpszeletsereg még a 4 ponton kivül a [24, c], [34 b] és [b, c] állandó pontokon megy át.*«

6. Ezen tételt symmetrikusabb alakban mondhatjuk ki a következő megjegyzések folytán.:

Az előbbiek szerint az (123)-mal sokszorozott 24 egyenes egyenletét így is írhatjuk:

$$(124)(230)-(234)(120)=0$$

a c egyenes egyenlete pedig

$$(134)(230)+(234)(130)=0,$$

ha most e két egyenletből (230)-t kiküszöböljük, akkor a (234) tényező elhagyása után a következő egyenletre jövünk:

$$(134)(120)+(124)(130)=0,$$

melyben az a egyenes egyenletét felismerjük. Mindez azt bizonyítja be, hogy 24 és c egyenesek metszés pontján az a egyenes is átmegy, minél fogva a [24, c] pont az [c, a] ponttal pótolható.

Hasonlóképen írhatjuk az (123)-mal sokszorozott 34 egyenesnek az egyenletét a következőképen:

$$(134)(230)-(234)(130)=0$$

a b egyenesnek az egyenlete pedig a következő:

$$(124)(230)+(234)(120)=0$$

ha pedig ezen egyenletekből (230)-t küszöböljük ki, úgy a (234) tényező elhagyása után a következő egyenletre jövünk:

$$(134)(120)+(124)(130)=0,$$

melyben az a egyenes egyenletét felismerjük, mi azt bizonyítja be, hogy a [34, b] ponton az a egyenes is átmegy, a miért a [34, b] pontot szintén [a, b]-vel jelölhetjük.

Ezen megjegyzések folytán az előbbi számban kimondott tételt a következő alakban mondhatjuk ki:

I. »*Ha az 123 háromszög mindeggik csúcsában az abban találkozó két oldalhoz és az illető csúcscsal a 4 ponttal összekötö egyeneshez ez utóbbinak conjugált negyedik harmonikus sugarat szerkesztjük, és ezeket a, b és c-vel jelöljük, akkor a 4 ponton átmenö és az 123 háromszögnek conjugált kúpszelet 4 ponton kívül még a [b, c], [c, a] és [a, b] állandó pontokon megy át.*«

7. Ezen tétel segítségével a jelen esetekben a kúpszelet nemének eldöntésére szolgáló kritériumokat a Mőbius-féle kritériumokból vezethetjük le, és a következő tételeket nyerjük:

II. »*Az adott ponton át is valamely háromszögnek conjugáltan vagy két parabola lehetséges, vagy pedig egy sem, a miként az adott pont a [b, c], [c, a] és [a, b,] pontokkal együtt vagy olyan helyzetben van, hogy ezen pontok közül bármely három a negyediket kizárja, vagy pedig nem.*

III. *A két adott pontból és egy conjugált háromszögből meghatározott kúpszelet nemét a következőképen döntjük el:*

Meghatározzuk először az egyik adott pontból és a conjugált háromszögből, a [b, c], [c, a] és [a, b] pontokat, akkor ezen pontok és az adott két pontból mindig négy olyant választhatunk ki, a melyen két parabola megy át, ha az ötödik pont *mind a két parabolán belül, vagy pedig mind a kettőn kívül fekszik a kúpszelet hyperbola, ha pedig az ötödik az egyik parabolán belül és a másikán kívül fekszik, akkor a kúpszelet ellipsis.«*

2. §. *Az érintőből és egy conjugált három oldalból meghatározott kúpszeletsereg egyenlete.*

8. Azon kúpszeletsereg egyenlete, mely az 123 háromoldalnak conjugált, a következő:

$$\lambda_1[230]^2+\lambda_2[130]^2+\lambda_3[120]^2=0\ldots.(1)$$

azon feltétel tehát, hogy az (1) alatti kúpszelet a 4 egyenest érintse ez lesz:

$$\lambda_1[234]^2+\lambda_2[134]^2+\lambda_3[124]^2=0\ldots.(2)$$

ha pedig az (1) és (2) alatti egyenletekből λ_1-et elimináljuk és $\frac{\lambda_3}{\lambda_5}=-\lambda$-val teszszük, a következő egyenletet nyerjük:

$$\begin{vmatrix}[230]^2 & [130]^2\\ [234]^2 & [134]^2\end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix}[230]^2 & [120]^2\\ [234]^2 & [124]^2\end{vmatrix}=0,\ \ldots(3)$$

mely a 4 egyenest érintő és az 123 háromoldalnak conjugált kúpszeletsereget fejezi ki. Ezen egyenlet az (f) és (g) alatti egyenletek tekintetbe vételével, még a következő alakra hozható:

$$\{[134][230]+[234][130]\}[340]+$$
$$+\{[124][230]+[234[120]\}[240]=0\ldots(4)$$

9. A következő pontok egyenleteit:

$$\left.\begin{array}{l}[124][130]-[134][120]=0\\ [124][230]-[234][120]=0\\ [134][230]-[234][130=0\end{array}\right\}\ldots.(5)$$

az (f) és (g) alatti egyenleteknél fogva, a következő alakra hozhatjuk:

$$\left.\begin{array}{l}[140]=0\\ [240]=0\\ [340]=0\end{array}\right\}\ldots.(6)$$

mely egyenletek a 4 egyenes és az 123 háromoldal oldalainak metszéspontjait fejezik ki. Jelöljük ezeket a, b és c-vel.

A következő pontok pedig:

$$\left.\begin{array}{l}[124][130]+[124][130]=0\\ [124][230]+[234][120]=0\\ [134][230]+[234][130]=0\end{array}\right\}\ldots\quad(7)$$

az 1, 2, 3 oldalok végpontjaihoz és az a, b, c pontoknak conjugált negyedik harmonikus pontokat fejezik ki. A (7) alatti pontokat a', b' és c'-vel jelöljük.

10. A (4) alatti egyenletből kitetszik, hogy a kérdéses kúpszeletsereg a 4 egyenesen kívűl még

$$b'c',\ bc',\ \text{és}\ cb'$$

egyenesektől érintetik.

A bc' és $b'c$ egyenesek aa' ponton mennek át, mit a következőképen bizonyítunk be. A (123)-mal sokszorozott b pontnak az egyenletét így irhatjuk:

$$[124][230]-[234][120]=0$$

a c' pontnak az egyenlete pedig:

$$[134][230]+[234][130]=0$$

ha pedig ezen két egyenletből [230]-t kiküszöböljük, akkor a következő egyenletet nyerjük:

$$[124][130]+[134][120]=0$$

mely a a' pontnak az egyenlete és így látjuk, hogy a b, c' és a pontok ugyanazon egyenesben feküsznek. Hasonlóképen bizonyítjuk be, hogy a c, b' és a' pontok is ugyanazon egy egyenesben fekszenek. Mindezeket a következő tételben foglalhatjuk össze.

IV. »*A 4 egyenest érintő és az 123 háromoldalnak conjugált kúpszeletsereg a 4 egyenesen kívül még a $b'c'$, $c'a'$ és $a'b'$ egyeneseket érinti.*«

Ezen tétel segitségével a kérdésben forgó esetekben a kúpszelet nemét a Möbius-féle kriteriumok segítségével dönthetjük el.

V. *Mindig van egy parabola, mely egy egyenest érint és egy adott háromoldalnak conjugált.*

VI. A két adott egyenest érintő és a háromoldalnak conjugált kúpszelet nemét a következőképen döntjük el:

Meghatározzuk mindenek előtt az egyik egyenest érintő és a háromoldalnak conjugált parabolát, azután a háromoldal oldalainak a, b, c metszés pontjait ezen érintővel, valamint még minden oldalon a két végponthoz és az a, b, c pontoknak conjugált negyedik harmonikus a', b', c' pontokat, akkor, ha

a) Ha a második egyenes nem metszi a parabolát, a kúpszelet ellipsis vagy hyperbola, a mint ugyanazon egyenes az a, b, c, a', b', c', pontokat páratlan vagy páros számban választja el.

b) Ha pedig a második egyenes a parabolát metszi, akkor a kérdéses kúpszelet ellipsis vagy hyperbola, a mint ugyanazon egyenes az a, b, c, a', b', c' pontokat páros, vagy pedig páratlan számban választja el.

Felhasználom ez alkalmat a következő czimű értekezésemben: »A Mőbius-féle kriteriumokról a kúpszeletek elméletében« előforduló számítási hibák és egyébb tévedések helyreigazítására.

A szóban forgó értekezés 8. lapján előforduló megjegyzés:

Az elemző mértan ismeretes tételéből következik, hogy az x_5, y_5 pont az illető parabolán kivűl, vagy belűl fekszik, a mint

$$\lambda-\lambda_1 \gtrless 0$$

és úgy szintén a (6) alatti parabolán kívűl, vagy belül, a mint

$$\lambda-\lambda_2 \gtrless 0,$$

helytelen. Annak eldöntésére, hogy az 5 pont melyik helyzeténél lesz a kúpszelet hiperbola és melyik helyzeténél ellipsis a szóban forgó értekezés (4) alatti feltételei szolgálnak. A mit ki kell mutatni az, hogy az első feltétnek megfelelőleg az 5 pont vagy mind a két parabolán kívűl, vagy pedig mind a két parabolán belül fekszik. Az első föltétel kétségkívül akkor következik be, ha a következő kifejezések:

$$\left.\begin{array}{l}(125)(345)-\lambda_1(145)(235)=(145)(235)(\lambda-\lambda_1)\\(125)(345)-\lambda_2(145)(235)=(145)(235)(\lambda-\lambda_2)\end{array}\right\}\ldots(a)$$

vagy egyidejűleg poistivok, vagy pedig egyidejűleg negativok.

A következőkben bizonyítjuk, hogy az a alatti kifejezések mindig ugyanazon előjelűek, valahányszor az 5 pont az (5) és (6) alatti parabolákon kívül, vagy azokon belűl fekszik. Vegyük fel a kitűzött czél elérésére, hogy az 5 pont a 23 egyenesben fekszik, azaz, hogy

$$(235)=0,$$

akkor az (a) alatti kifejezések egymás között egyenlők lesznek és a következőbe mennek át:

$$(125)(345);$$

de miután a 23 egyenesnek sem az (5), sem a (6) alatti parabolával a 2 és 3 pontokon kívül egyéb közös pontja nincs, azért a 23 egyenesnek bármely más pontja vagy mind a két parabolán kívül, vagy pedig mind a két parabolán belül fekszik. Miután tehát ezen esetben az a alatti kifejezéseknek előjelei ugyanazok, mert hisz egymással egyenlők, azért ugyanaz fog állani, ha az 5 pont a 23 egyenesből kilép a nélkül, hogy a két parabola közűl az egyikét áthaladná.

Az id. ért. 11. lapján előforduló jegyzet elején

$$\varphi>0\left\{\begin{array}{l}\nabla<0 \text{ hyperbola}\\ \nabla>0 \text{ parabola}\end{array}\right.$$

A 12 lapon előforduló ∇-ra vonatkozó értékekben ennek kell állani,

$$\nabla=\frac{1}{4}(145)^3(235)^3(234)(134)(124)(123)\lambda(\lambda+1)$$

vagy λ-nak a (9) alatti egyenletből eredő érrtékét helyettesítve:

$$\nabla=\frac{1}{4}\frac{(145)(235)(234)(134)(124)(123)(125)(345)}{\{(125)(345)+(145)(235)\}}$$

vagy ha még észrevesszük, hogy:

$$(125)(345)+(145)(235)=(135)(245)$$

amint azt az id. helyen levezettük, akkor végre:

$$\nabla = \frac{1}{4}(234)(134)(124)(123)(125)(345)(135)(245)(145)(235)$$

Az id. h. 7 számában [13. l.] ∇-ra vonatkozó megjegyzések mélyebb megfontolásokat igényelnek, mintsem ott történtek, a miért a következőket kell előrebocsátani.

(A háromszög területe az oldalak coordinátáiból). Ha az ikl háromoldalban az i, k, l oldalaknak szemben fekvő csúcsainak coordinátáit x_i, y_i; x_k y_k és x_l y_l-lel jelöljük, továbbá legyen:

$$\left.\begin{aligned} u_i\, x_i + v_i\, y_i + 1 &= p_i \\ u_k\, x_k + v_k\, y_k + 1 &= p_k \\ u_l\, x_l + v_l\, y_l + 1 &= p_l \end{aligned}\right\}, \quad \ldots (c)$$

akkor ezen is az (a) és (b) alatti jelöléseknél fogva:

$$(ikl)\,[ikl] = p_i\, p_k\, p_l, \quad \ldots (2)$$

mely egyenletbe (ikl) determináns az (1) alatti egyenletnél fogva vagy $+2t$, vagy $-\ 2t$, amiként az ikl-i körűlírás positiv, vagy negativ.

Annak eldöntése, hogy a (2) képletben 2t minő előjellel veendő, tehát $p_i\, p_k\, p_l$ sokszorozmány és $[ikl]$ előjelétől függ. Különösen lényegesnek mutatkozik az $[ikl]$ determinins előjelének meghatározása, mit a különféle lehetséges felvételek mellett a következő megfontolások segítségével fogunk eldönteni.

Ha a háromszögöt akár a szögpontokból írjuk le, akár pedig az oldalakból, akkor e két körűlirás mindig ugyanazon értelmű, mely megjegyzésből következik, miután (ikl) determinans positiv körűlirásánál szintén positiv, hogy ekkor az $[kl]$ determinans positiv, vagy negativ, amiként $p_i\, p_k\, p_l$ sokszorozmány előjele positiv, vagy negativ. Ha ellenben az ikl-i körűlírás negativ, akkor (ikl) is negativ lévén, az $[ikl]$ determináns positiv, vagy negativ, amiként $p_i\, p_k\, p_l$ sokszorozmány ?negativ, vagy positiv.

Ha átalában

$$ux + vy + 1 = p$$

ekkor p előjele csak úgy változhatik meg, ha az (xy) pont az

(u, v) egyenes egyik oldaláról a másikára megy. Ha nevezetesen $(x = o, y = o)$ tehát az (x, y) pont a coordinátarendszer o kezdőpontja, akkor $p = +1$, p tehát positiv és így tehát átalában, ha az (xy) pont az (u, v) egyenesnek azon oldalán fekszik, mint a melyen a kezdőpont, akkor p positiv, ha pedig ezzel ellenben az (xy) pont és az o kezdőpont az (u, v) egyenestől elválasztatnak, akkor p negativ. Ezt már most a

$$p_i \, p_k \, p_l$$

sokszorozmányra alkalmazva, találjuk, hogy ez mindenkor positiv, ha az o kezdőpont a háromszögön belül fekszik. Az ik^l oldalak a síkot hét részre osztják, melyek közűl az első a háromszögön belüli rész, a többiek pedig a csucsok és az oldalak felett emelkednek. Ha továbbá az o kezdőpont egy a csúcsok feletti síkrészben fekszik, akkor a fentebbi sokszorozmány szintén positiv, ha pedig az o kezdőpont egyikében az oldalak felett emelkedő síkrészben fekszik, akkor az negativ.

Ezeket mind egybevetve, az $[ikl]$ determinans előjelét a következő szabály határozza meg:

»*Az i, k, l egyenesek vonalcoordinátáiból meghatározott [ikl] determináns ikl-i positiv körűlírásnál fogva positiv, vagy negativ (negativ körülirásnál pedig, negativ vagy positiv) a miként az o kezdőpont vagy a háromszögön belül és a csúcsok felett emelkedő síkrészekben, vagy pedig az oldalak felett emelkedő sík részekben fekszik.*«

A következőképen megvizsgáljuk az $[ikl]$ determináns változását, ha az ikl háromoldalnak oldala változik. Ezen változásnál az l egyenesnek a következőkre kell ügyelnünk, hogy 1-ször a körűlhaladás iránya változik és hogy az l egyenes átlépi-e az (ik) és az o pontokat.

Ha az l egyenes az (ik) és o pontok egyikét átlépi, a másikát pedig nem és pedig úgy, hogy a körűlhaladás iránya ne változzék, akkor o az új háromoldalban az ellenkező helyzetet nyeri és így $[ikl]$ az előjelét megváltoztatta, De ha az l egyenes változásánál egyszersmind az ikl-i körűlhaladás iránya is változik, akkor o nem lép át az ellenkező helyzetbe és igy $[ikl]$ előjele szintén változik.

Ha továbbá az l egyenes helyzetének változásánál az (ik)

és o pontok közül vagy mind a kettőt átlépi, vagy pedig egyikét sem, akkor o helyzete vagy az ellenkezőbe megy át, vagy pedig nem, a mint az *ikli* körűlhaladás iránya is változik, vagy megmarad, most tehát $[ikl]$ előjelét megtartja.

Ezeknél fogva az l egyenes változásánál az $[ikl]$ előjelére nézve a következő eredményt nyerjük:

Ha az ikl háromoldalban az l egyenes helyzetét, változtatja és ezen változásnál vagy az (ik) vagy pedig az o pontot átlépi, akkor az [ikl] determináns előjele változik, ha pedig az l egyenes az előbb nevezett két pont közül, vagy mind a kettőt átlépi, vagy pedig egyikét sem, akkor az [ikl] determináns előjelét megtartja.

Ez előrebocsátott megjegyzések szerint ∇-nak az előjelét már most a következő megfontolások segítségével döntjük el.

Határozzuk meg mindenek előtt az 1, 2, 3, 4 egyeneseket érintő parabolát s hagyjuk meg állandóknak az 1, 2, 3, 4 egyeneseket, holott az 5 egyenes helyzetét változtatjuk. Ennélfogva tehát a ∇ értékben előforduló

$$(234)(134)(124)(123)$$

tényező nem fog változni, de a következő tényező;

$$(125)(345)(135)(245)(145)(235)$$

változást fog szenvedni. Mindazon háromszögökben, a melyeknek ezen determinánsok megfelelnek, az 5 egyenes képezi az egyik oldalt és az 1234 teljes négyszög

$$12,\ 34,\ 13,\ 24,\ 14,\ 23$$

csúcsai képezik az 5 oldalnak szembenfekvő csúcsokat.

Ha már most az 5 egyenesnek olyan kezdetleges helyzetéből indulunk ki, melynél az előbb felsorolt hat pont valamennyien az 5 egyenes egyik oldalán feküsznek és most az 5 egyenest oly helyzetbe vezetjük át, hogy az az

$$12,\ 34,\ 13,\ 24,\ 14,\ 23$$

pontok közűl az egyikét, p; az 12-t átlépi, akkor ha az 5 egyenes ezen változásánál az az o pontot át nem lépi, az $[125]$ determinánsnak az előjele megváltozik, holott a többi öt determinánsnak az előjele váltózatlan marad, minélfogva ∇-nak az előjele megváltozik. Ha pedig az 5 egyenes az o pontot átlépi, akkor [125]-nek az előjele változatlan marad, holott a tőbbi öt determinansnak az előjele megváltozik. Ugyanez fog történni valahányszor az 5 egyenes a szóban forgó hat pont közűl bármelyikét lépi át. Ebből az következik, hogy valahányszor az 5 egyenes az 1234 teljes négyszög csúcsainak bármelyikét lépi át, mindannyiszor ∇-nak az előjele megváltozik és így feltéve, hogy az 5 egyenes ezen változásánál az 1234 egyenesekből meghatározott parabolát át nem lépi, úgy valahányszor az 5 egyenes az 1234 teljes négyszög egyik csúcsát átlәpi, mindanynyiszor az 1, 2, 3, 4, 5 egyenesekből meghatározott kúpszelet ellipsisből hyperbolába, vagy megfordítva hyperbolából ellipsisbe fog átmenni.

Hogy most az eredő kúpszelet nemét véglegesen eldönthessük, ismernünk kell az 5 egyenes bizonyos helyzeténél a kúp. szelet nemét.

Tegyük fel, hogy az 5 egyenes az 1, 2, 3, 4 egyenesekből meghatározott parabolát nem metszi és hogy az 1 2 3 4 teljes négyoldalnak mind a hat csúcsa az 5 egyenes egyik oldalán feküdjék, akkor kimutatjuk, hogy a kúpszelet nem lehet ellipsis. Mert ha öt egyenes egy ellipsist érint, akkor ezen érintők a síkot egy teljesen bezárt és egy végtelen nagy részre osztják, mely síkrészek mindegyikének azon tulajdonsága van, hogy annak mindegyik pontjából mind az öt érintőhöz juthatunk a nélkül, hogy azok közűl az egyikét átlépnők, de egy ilyen síkrészt az említett öt egyenes ezen helyzetükben nem képeznek, mert minden pontból, mint például a parabolán belűl fekvő pontokról, melyekből az 1, 2, 3, 4 érintőkhöz juthatunk az 5 egyeneshez, annak jelenlegi helyzeténél a nélkül nem juthatunk, hogy az első négy egyenes közűl egyikét át ne lépnők. Ha tehát az 5 egyenesnek tetszőleges helyzete van, akkor vezessük át azt ezen helyzetbe és legyünk figyelemmel φ ∇ jegyváltásaira. A mint azután a jegyváltások páros, vagy, páratlan számuak, akkép lesz az eredő kúpszelet hyperbola: vagy ellipsis.

Mőbius kriteriumát tehát a következőképen mondhatjuk ki,

Az öt adott egyenes közűl bármely négyet kiválasztva mindig van egy parabola, mely a négy egyenest érinti, és *a*) Ha az ötödik egyenes nem metszi a parabolát, akkor a kúpszelet ellipsis, vagy hyperbola, a mint az ötödik egyenes az első négy egyenes hat metszéspontját páratlan, vagy páros számban választja el.

b) Ha pedig az ötödik egyenes a parabolát metszi, akkor az ellipsis, vagy hyperbola, a mint az ötödik egyenes az első négy egyenes hat metszés pontját páros vagy páratlan számban választja el.

Ha végre az ötödik egyenes a parabolát érinti, akkor az maga felel meg a feladat követelményeinek.

A szóban forgó értekezésem, mely szintén német fordításban jelent meg Borchardt: Journal für die r. u. a. Math. czimű folyóirat 89. kötetében, Durége prágai egyetemi tanárnak alkalmat szolgáltatott a következő czimű értekezésének közzétételére: Über die von Mőbius gegebenen Kriterien etc. (Sitigber. der k. Akad. d. Wiss. zu Wien II. Abth. Bd. 82), melyben Durége az értekezésemben előforduló hibákat helyreigazítja.

Pusztán csak a tényállás constatálása miatt említem meg, hogy már magam is az általa tett helyreigazításokat mind észrevettem, kivéve az itten először felhozott tévedést, mely állításom igazolására több helyben tartózkodó ismerősemre hivatkozhatom.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgés. forrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erőmütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában . 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan. trigonometriája. . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hullo csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.
VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.
VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . . . 20 kr.

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.